30.08.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika I**

1. a) Metodom matematičke indukcije dokazati da

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

vrijedi za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$.

b) Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati A^7.

2. Riješiti linearni sistem jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}.$$

3. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 0, -1)$ i normalna je na ravnima $2x - y - 3 = 0$ i $x + y - z + 1 = 0$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

30.08.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika I**

1. a) Metodom matematičke indukcije dokazati da

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

vrijedi za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$.

b) Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati A^7.

2. Riješiti linearni sistem jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}.$$

3. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 0, -1)$ i normalna je na ravnima $2x - y - 3 = 0$ i $x + y - z + 1 = 0$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

(#) Metodom matematičke indukcije dokazati da

$$1+2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$$

vrijedi za sve prirodne brojeve $n\in\mathbb{N}$.

Rj.

BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za $n=1$.

$$1+2^1=2^{1+1}-1$$

$$3=3$$ Tvrdnja je tačna za $n=1$

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za sve brojeve od 1 do n tj.

$$1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1 \quad \text{za } \forall k=1,2,\ldots,n$$

i na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$.

$$\underbrace{1+2+2^2+\ldots+2^n}_{\substack{=2^{n+1}-1 \\ \text{(na osnovu pretpostavke)}}}+2^{n+1} \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=\!=} 2^{n+1}-1+2^{n+1}=$$

$$=2\cdot 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$$

$$=2^{(n+1)+1}-1$$

Prema tome jednakost je tačna za $n+1$.

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati A^7.

R.j.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Riješiti linearni sistem jednačina

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 3\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3\\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 4.
\end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Gausovom metodom

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 & (1)\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 3 & (2)\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 & (3)\\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 4. & (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)-(1):&\quad 2x_3 + 2x_4 = 2 & (\mathrm{I})\\
(3)-(1):&\quad x_3 + 2x_4 = 2 & (\mathrm{II})\\
(4)-(1):&\quad 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 & (\mathrm{III})
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{I})-(\mathrm{II}):\quad x_3 = 0 \quad \overset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow} \quad x_4 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 0\\ x_4 &= 1\end{aligned}\right\} \overset{(\mathrm{III})}{\Longrightarrow} \quad 2x_2 + 2 = 3$$

$$2x_2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

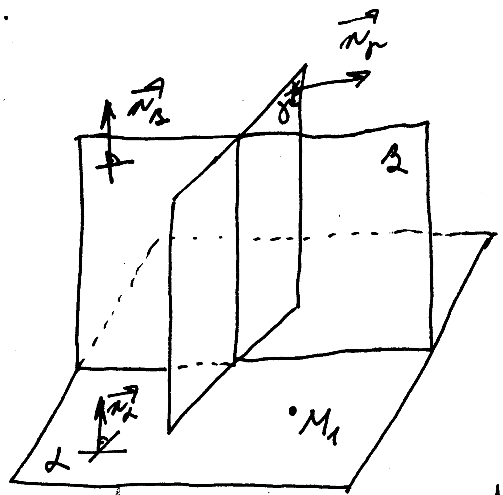
$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad x_1 = 1 - \frac{1}{2} - 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

Rješenje sistema je $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2,0,-1)$ i normalna je na ra ravnima $2x-y-3=0$ i $x+y-z+1=0$.

Rj.



$\alpha: ?$

$\beta: 2x-y-3=0, \quad \vec{n}_\beta=(2,-1,0)$

$\gamma: x+y-z+1=0, \quad \vec{n}_\gamma=(1,1,-1)$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Ako } M_1 \text{ uvrstim u } \beta \text{ imam} \\ 2\cdot 2-0-3\neq 0 \\ \text{Ako } M_1 \text{ uvrstim u } \gamma \text{ imam} \\ 2+0+1+1\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_1\notin\beta \\ \text{i } M_1\notin\gamma\end{array}$$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

jednačina tražene ravni

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta \\ \vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta\times\vec{n}_\gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\exists k\in\mathbb{R}: \vec{n}_\alpha = k(\vec{n}_\beta\times\vec{n}_\gamma)$$

$$\vec{n}_\beta\times\vec{n}_\gamma = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \vec{i}(1-0)-\vec{j}(-2-0)+\vec{k}(2+1)=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

$$=(1,2,3)$$

$$\vec{n}_\alpha = k(1,2,3)=(\overset{A}{k},\overset{B}{2k},\overset{C}{3k})$$ gdje je k neki realan broj, $k\neq 0$

$$k(x-2)+2k(y-0)+3k(z+1)=0 \quad /:k$$

$$x+2y+3z-2+3=0$$

$$x+2y+3z+1=0$$

jednačina tražene ravni

(#) Ispitati i grafički predstaviti f-ju $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

R; DEFINICIONO PODRUČJE

$1+x \neq 0$

$x \neq -1$ D.p. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

ZNAK, NULE, PRESJEK SA Y-OSOM

$f(0) = \dfrac{0}{1+x} = 0$, $y=0$ akko $x=0$

$(0,0)$ je nula f-je i presjek sa y-osom

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
y	$-$	$+$	$+$

znak f-je

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

Definiciono područje nije simetrično pa f-ja nije ni parna ni neparna. F-ja nije periodična.

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

F-ja za $x=-1$ ima prekid.

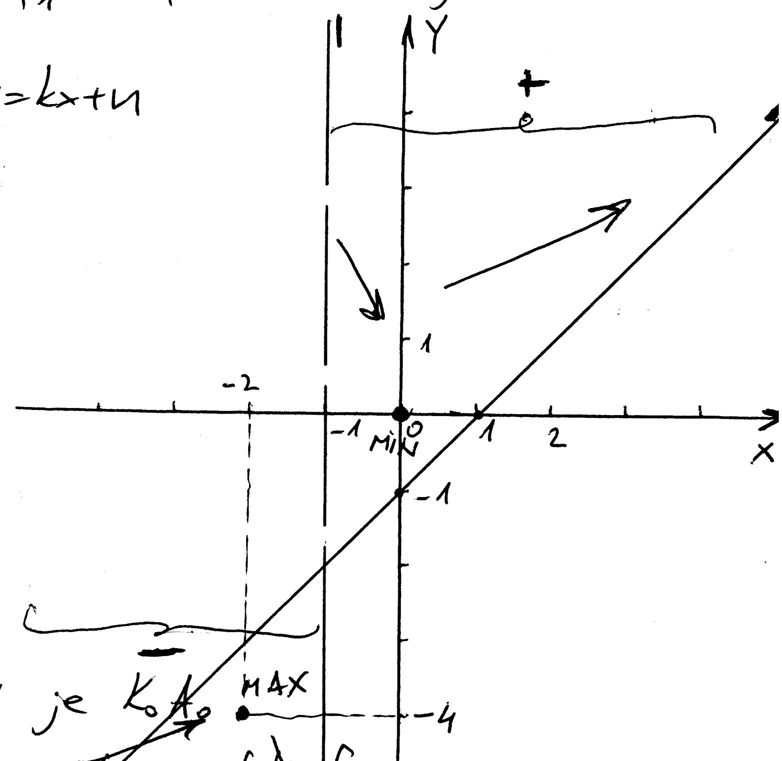
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1-0} f(x) &= \lim_{x\to -1-0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{(-1-0)^2}{1-1-0} = \frac{1+0}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to -1+0} f(x) &= \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{(-1+0)^2}{1-1+0} = \frac{1-0}{+0} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-1 \text{ je V.A.}$$

$$\lim_{x\to \mp\infty} f(x) = \lim_{x\to \mp\infty} \frac{x^2 \; /:x}{1+x \; /:x} = \lim_{x\to \mp\infty} \frac{x}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+1} = \mp\infty \Rightarrow \text{f-ja nema H.A.}$$

Tražimo kosu asimptotu u obliku $y = kx+n$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \; /:x^2}{x+x^2 \; /:x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{1+x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x+x^2)}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x \; /:x}{1+x \; /:x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\frac{1}{x}+1} = -1 \Rightarrow y = x-1 \text{ je K.A.}$$



Poslije ovog koraka počinjemo skicirati grafik f-je.

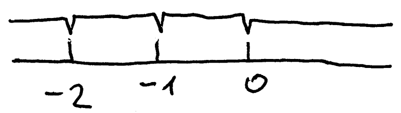
RAST I OPADANJE

$$y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

$y' = 0$ akko $2x + x^2 = 0$

$x(2+x) = 0$

$x = 0$ ili $x = -2$



← prekidi y + nule y'

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	+	−	−	+
y	↗	↘	↘	↗

MAX MIN

tabela rasta i opadanja

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja vidimo da f-ja ima ekstreme za $x = -2$ i $x = 0$.

$f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$, $f(0) = 0$

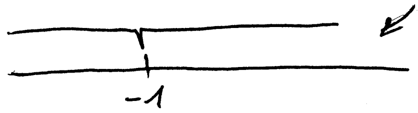
F-ja ima maksimum u tački $(-2; -4)$ a minimum u tački $(0, 0)$.

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$y'' = \left(\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}\right)' = \frac{(2+2x)(1+x)^{\cancel{2}\,1} - (2x+x^2)2\cancel{(1+x)}}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2 \cancel{+2x} \cancel{+2x} \cancel{+2x^2} \cancel{-4x} \cancel{-2x^2}}{(1+x)^3}$$

$$y'' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

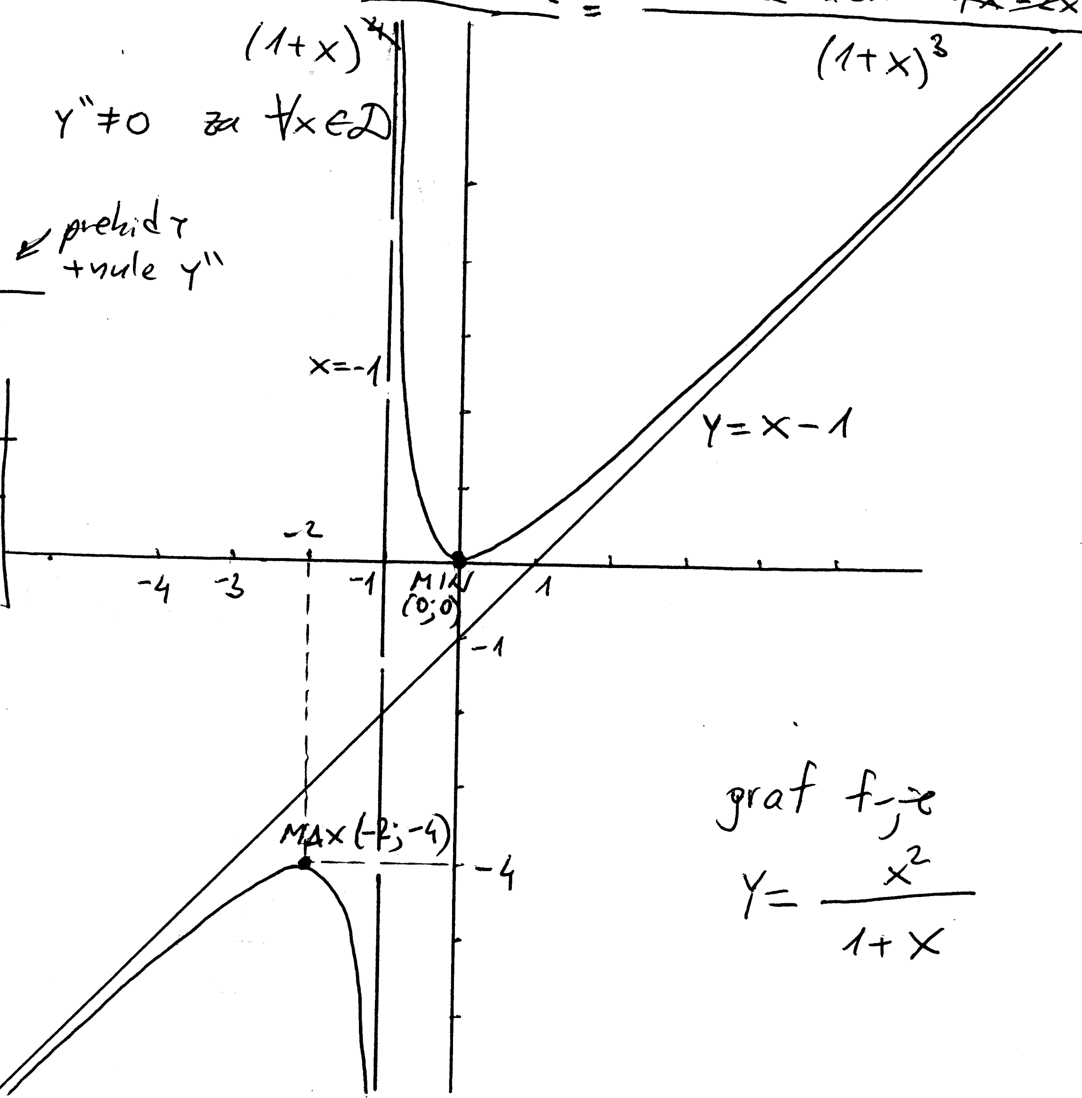
$y'' \neq 0$ za $\forall x \in D$



← prekidi + nule y''

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
y''	−	+
y	∩	∪

tabela konveksnosti i konkavnosti



graf f-je $y = \frac{x^2}{1+x}$